Opérations sur les impédances

Robert BERRANGER, F5NB (à la mémoire de F6BPS)

Les impédances qualifient le résultat d'une association en série d'une résistance et d'une réactance. Quand on additionne deux impédances on additionne séparément les résistances et les réactances selon la règle des nombres complexes. OK, mais peut-on soustraire deux impédances ?

Préambule

Il y a des exégètes qui discutent sur le sexe des anges. Eh bien nous, avec F6BPS, nous discutions sur le signe de la réactance. Ne dites pas que les retraités n'ont rien à faire. C'est faux, nous avons encore plus de choses à faire que les "actifs", mais nous, nous savons prendre du temps pour les choses sérieuses.
Lors de la préparation des "Comment ça marche" de février et mars 2014 sur la réactance et la résonance, nous avons eu quelques échanges, Jean-Pierre et moi, en particulier celui-ci :

"Concernant la notation des réactances, nous sommes partis pour un échange d'arguments.
Ma plaidoirie à moi serait : $Xc = 1 / JC\omega = -J/C\omega$
On en reparle… Bien sûr je ne suis pas sûr de gagner. Encore un point sur lequel F6FQX saurait nous départager.
73, Jean-Pierre. "

Voici ma réponse :

Le "j" est une convention d'écriture pour signifier que la suite est déphasée de 90° en plus ou en moins selon le signe de j. Mathématiquement le "j" représente une multiplication par le nombre imaginaire (0,1) qui a comme propriété particulière que $\{J^2 = -1\}$. Cet usage n'est nécessaire que pour calculer une impédance complexe Z qui n'existe que si l'on trouve des associations de réactances et de résistances. Quand on a affaire à des réactances pures XL et XC, le "j" est superflu, le signe suffit [(1)].
Je rappelle que (-X) est équivalent à -(X). Donc X = +(X1) + (-X2), est équivalent à X = X1-X2. Le signe de X dépend du signe du résultat des additions et soustractions successives. Ceci est une facilité d'écriture et de calcul et ne contredit pas le fait que toutes les réactances s'ajoutent (la soustraction n'est que l'addition d'un nombre négatif).

Soustraction d'impédances

Pas de problème pour les réactances qui peuvent avoir un résultat négatif comme on l'a vu. Mais on ne peut pas avoir un résultat négatif pour la résistance. Pourtant l'opération est possible si l'on soustrait une résistance négative (moins par moins donne plus dans la règle des signes car le signe est une **multiplication** de la valeur par +1 ou -1).

Résistance négative

Tout le monde OM connaît la loi d'Ohm : **U = R×I**. Cette loi montre que si l'on augmente la tension aux bornes d'une résistance, le courant qui la traverse va augmenter aussi. Cela reste

vrai si l'on remplace la résistance par une boîte noire (dipôle) qui a un comportement résistif (antenne à la résonance par exemple).
Maintenant, supposons que lorsqu'on augmente la tension aux bornes d'un dipôle (boîte noire), le courant qui le traverse diminue. On dit alors que le dipôle a le comportement d'une résistance négative. Ceci n'est pas une vue de l'esprit. En effet, il existe un dipôle particulier, la "diode tunnel", qui a partiellement un tel comportement. Voir sa caractéristique U/I sur la figure 1.

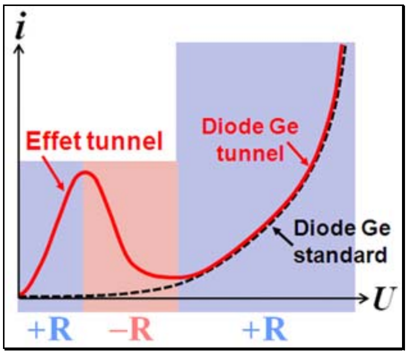

Figure 1 : **Résistance de la diode tunnel**

La diode tunnel a été très employée dans les oscillateurs hyperfréquences. Nous allons voir que l'on peut obtenir le même effet avec un circuit électronique particulier, le N.I.C. (**N**égative **I**mpedance **C**onverter).

Impédance négative et impédance conjuguée

On peut définir une impédance négative telle qu'ajoutée à l'impédance positive conventionnelle, le résultat soit zéro. Exemple :
{R+jX} + {-R-jX} = 0 [(2)].
On voit alors que si un N.I.C. inverse une résistance, il inverse aussi une réactance, c'est-à-dire qu'il transforme une capacitance en inductance et *vice versa.*
En pratique, une impédance négative est un objet purement mathématique. Mais si l'on se contente d'inverser seulement la réactance en gardant une résistance positive, on obtient une impédance conjuguée qui est un objet bien réel très utilisé dans les domaines de l'adaptation et de la résonance. C'est ce principe qui est obtenu à l'aide d'un gyrateur et la figure 2 va nous permettre d'analyser le système.

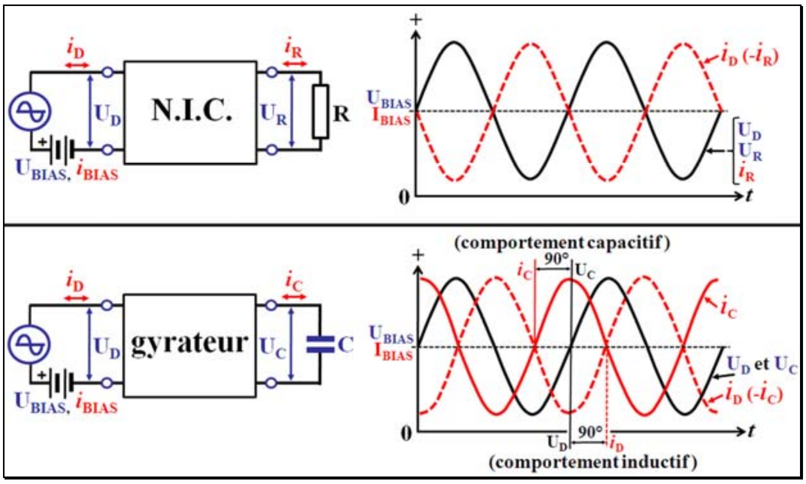

Figure 2 : **Principe du N.I.C et du gyrateur**

Nous voyons qu'en prenant la sinusoïde de la tension en référence, le N.I.C. a pour effet d'inverser la sinusoïde du courant, soit un déphasage de 180°. Le gyrateur est une variante de N.I.C. Utilisé avec un composant réactif, l'action du gyrateur à pour effet de changer le signe du déphasage entre tension et courant, donc de changer le type de la réactance.
Le gyrateur est surtout employé en basse fréquence pour synthétiser une bobine à partir d'un condensateur [(3)]. Voir sur la figure 3 un schéma d'application.

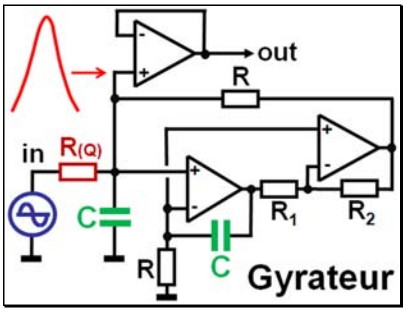

Figure 3 : **Circuit oscillant parallèle synthétisé à l'aide d'un gyrateur avec uniquement des capacités**

A part $\mathbf{R_{(Q)}}$ qui fixe la bande passante du circuit, toutes les autres résistances sont égales et de très faible valeur devant $R_{(Q)}$. On peut ajuster la fréquence en déséquilibrant le rapport R_1-R_2. Avec une impédance (résistive) "positive", U étant constant, quand R augmente, I diminue (et inversement). On peut avoir un système dont la réponse à sa sortie est telle que lorsque l'impédance de charge (R) augmente (avec U constant), le courant la traversant augmente au lieu de diminuer. L'ensemble se conduit comme si nous chargions un système standard avec une résistance négative. Nous avons obtenu un **gyrateur**. Si à l'entrée du gyrateur U et I sont en phase, ils le restent en sortie. Si en entrée, U est en avance de phase sur I (caractéristique d'une réactance selfique), alors en sortie, U est en retard de phase sur I (caractéristique d'une réactance capacitive) et inversement. Nous avons le moyen de "synthétiser" une bobine de forte valeur très encombrante avec une capacité ayant un encombrement beaucoup plus restreint [(4)]. J'ai pu ainsi obtenir un filtrage à 10 kHz avec une bande passante de 10 Hz (Q=1000) avec seulement des résistances (positives) et des condensateurs de 68 nF. Noter qu'une résistance négative est une résistance "apparente" comme les réactances.

Notes

(1) *Avec les nombres complexes, les composantes s'additionnent séparément. Si elles s'appelaient toutes les deux "R" alors il faudrait noter "Z = ±jR". Mais la notation "X" comporte implicitement le nombre imaginaire j. Ainsi on note Z = R,X (±X) ex : Z = 60 Ω,-125 Ω. Si R=0, Z = -125 Ω si la réactance est négative et Z = +125 Ω si elle est positive. Il ne faut pas oublier le signe + car Z = 125 Ω est la valeur d'une résistance. En général le contexte ne permet pas le doute. Rien n'interdit d'ajouter un "j" s'il y a un risque. Mais on dira "on ajoute un condensateur en série tel que Xc = 125 Ω", ou "ayant une réactance de 125 Ω". Dans ces cas là, le signe serait redondant. De même on note "Xc = 1/ω C". " Mais si l'on veut bien marteler l'expression pour les esprits lents, on peut toujours utiliser des redondances. Exemple social : le "tri sélectif" ("tri des déchets" est beaucoup plus élégant et plus précis).*

(2) *Pour additionner deux nombres complexes {a,b} et {a',b'}, on additionne séparément a+a' et b+b'.*

(3) *En basse fréquence, les bobines deviennent vite encombrantes avec un mauvais coefficient de qualité. Le principe du gyrateur est aussi employé dans les circuits intégrés hyperfréquence pour synthétiser une inductance.*

(4) Prenons le courant comme référence et traçons les variations de U pour un condensateur et pour une bobine. Nous voyons bien que quand U augmente pour l'un, U diminue pour l'autre. Donc si nous associons en parallèle un condensateur avec la sortie d'un gyrateur commandé par un autre condensateur, nous obtenons un circuit oscillant parallèle.