Une approche didactique de la théorie de l'échantillonnage

Robert BERRANGER, F5NB

Beaucoup d'OM ont entendu parler de "SDR", mais peu ont une idée exacte des systèmes applicatifs que cet acronyme "fourre-tout" renferme. La SDR ne peut être mise en œuvre qu'après conversion analogique / numérique du signal selon la théorie de l'échantillonnage, objet de cet article.

Réception Radiophonique.

Pour simplifier notre propos, nous nous limiterons à la réception de la téléphonie. Alors le rôle du récepteur sera de fournir à un haut-parleur l'information qui nous intéresse parmi toutes celles reçue par l'antenne de réception, ce qui nécessitera trois opérations plus ou moins imbriquées :

- Filtrage
- amplification
- démodulation (AM, FM) ou transposition en bande audio (CW, BLU).

L'ensemble de ces opérations réalise un traitement du signal antenne. Ce traitement peut être fait à l'aide de circuits analogiques, en général nombreux, imparfaits, encombrants et chers. Il peut aussi être fait par calcul numérique et devenir ainsi quasiment parfait [(1)]. Mais cette manière nécessite deux opérations nouvelles qui sont, d'une part la conversion numérique du signal Antenne [(2)] (**C**onversion **A**nalogique / **N**umérique ou **CAN**) et d'autre part, la conversion analogique des valeurs numériques obtenues après traitement pour actionner le haut-parleur (**C**onversion **N**umérique / **A**nalogique ou **CNA**). Cette dernière opération ne pose en pratique aucun problème de précision, ce qui n'est pas le cas pour la conversion **A**nalogique / **N**umérique. Les **performances** [(3)] du récepteur seront alors entièrement dépendantes de celle-ci. L'ensemble des circuits remplissant la fonction s'appelle en bon franglais "**front-end analogique**". Nous avons sur la figure 1 les synoptiques simplifiés des deux types de récepteurs.

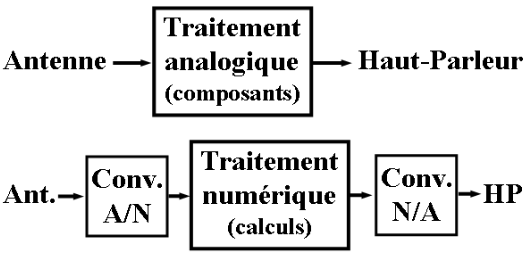

Figure 1.

Conversion Analogique / Numérique.

Le principe est très simple : il suffit de mesurer la tension d'entrée à une cadence suffisante pour qu'aucune information ne soit perdue. Cette opération est appelée "**échantillonnage**". Le résultat est montré sur la figure 2.

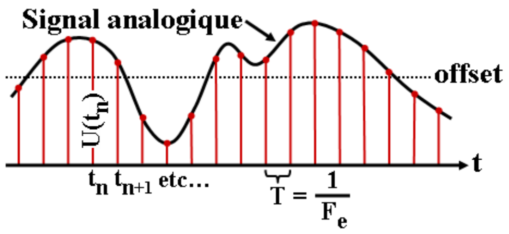

Figure 2.

La principale conséquence de l'échantillonnage est que la fonction descriptive du signal converti est devenue discontinue. Cette discontinuité va entraîner des artefacts mathématiques qui vont dégrader les résultats si nous n'y prenons garde.
Une première approche consisterait à échantillonner le signal à une cadence et une précision telles que si l'on reconvertissait immédiatement les valeurs numériques en analogique, nous obtiendrions **exactement** le même signal qu'à l'entrée [(4)]. Voyons où cela nous mènerait :

- soit un signal à une fréquence de 10 MHz
- soit des signaux brouilleurs avec un niveau global à +80dBc (10000 fois plus important que notre signal, valeur rencontrée en pratique)
- soit une précision de 1% demandée à notre signal
- soit un traitement numérique nécessitant 10000 opérations par échantillon (un minimum)

On aboutirait alors *grosso modo* à une cadence d'échantillonnage de 6 GHz avec une précision de conversion de 1 millionième (CAN 20 bits) et à une puissance de calcul de 60 téraflops ! Inimaginable, même à notre époque.
La deuxième approche consiste à remplacer une conversion fidèle (échantillonnage fin) du signal d'entrée par une conversion n'ayant pour but que de conserver l'information contenue dans notre propre signal. La connaissance des caractéristiques de celui-ci va nous permettre à partir d'un minimum d'échantillons de reconstituer par interpolation les échantillons manquants. Cette méthode constitue ce que l'on appelle la "**théorie de l'échantillonnage**" :

La théorie de l'échantillonnage utilise les propriétés de deux théorèmes principaux : Celui de Fourier et celui de Shannon-Nyquist

Théorème de Fourier

On peut l'énoncer de cette manière :

Un signal périodique de période T est une somme de signaux sinusoïdaux harmoniques de périodes {T/*n*} (*n* = 1··∞)

La figure 3 nous montre une illustration de la décomposition en série de Fourier.

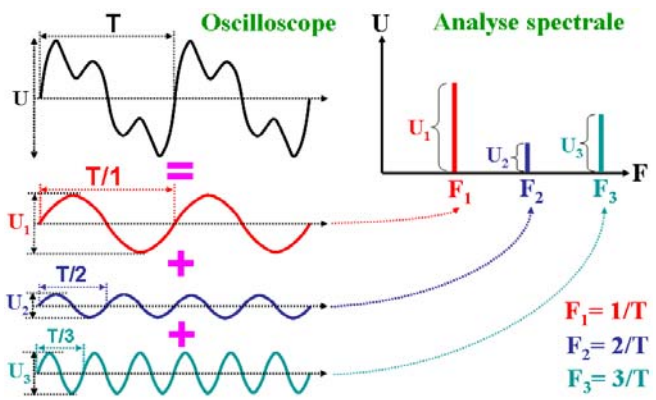

Figure 3.

Le graphique de droite est appelé "spectre électrique du signal". Il est constitué d'un ensemble de raies. Chacune d'elle représente l'amplitude d'un signal **sinusoïdal**, composante harmonique de la période.
Le signal issu de l'antenne est une somme de signaux périodiques évoluant plus ou moins rapidement. Le spectre de celui-ci est composé d'une multitude de raies dont la présence et l'amplitude évoluent avec le temps.
Ainsi notre problème d'échantillonnage du signal antenne (fonction inconnue) se ramène alors à considérer l'échantillonnage d'un signal **sinusoïdal** (fonction connue).

Théorème de Shannon.

On peut l'énoncer de cette manière :

Un signal sinusoïdal est parfaitement défini si l'on connaît au moins 2 valeurs échantillonnées par période.

Ainsi, si le spectre qui contient l'information de notre signal est référencé à la fréquence zéro (bande de base) il sera correctement échantillonné si le **critère de Shannon** est respecté pour la raie à la fréquence la plus élevée. Mais si le spectre a une autre fréquence de référence (porteuse HF, par exemple) alors il sera correctement échantillonné si le **critère de Nyquist** est respecté.

Théorème de Shannon-Nyquist.

C'est une généralisation du théorème de Shannon. On part du principe qu'un signal quelconque ($\mathbf{F}_{réf}$ quelconque) ayant une certaine largeur spectrale peut toujours être transposé en un signal en bande de base ($\mathbf{F}_{réf}$ = zéro) sans altération de l'information qu'il contient [5]. En appliquant ce principe au théorème de Shannon, celui-ci devient :

Pour que l'information transmise par un signal occupant un spectre de largeur B ne soit pas altérée il suffit de l'échantillonner à une cadence de 2×B.

Ainsi un signal **HF** BLU (phonie 300-3000 Hz, soit une largeur de spectre de 2700 Hz) pourra être échantillonné au minimum à 5,4 kHz (méthode du Weaver) ou à 6 kHz (méthode du Phasing).
Un signal AM pourra être échantillonné à 12 kHz ou même à 6 kHz, en perdant 3 dB sur le rapport S/B (les bandes latérales sont redondantes).
Pour un signal FM, la fréquence d'échantillonnage sera non seulement dépendante de la bande phonie, mais aussi de l'indice de modulation.
Pour échantillonner la totalité de la bande 2 m (144-146 MHz), une cadence de 4 MHz suffirait en théorie.
Grâce au théorème de Shannon-Nyquist, la fréquence d'échantillonnage d'un signal BLU à 10 MHz passe de 6 GHz (voir première approche ci-dessus) à 6 kHz. Mais l'opération ne peut se faire sans ambiguïté que si notre signal est seul. Sinon, il faut avant conversion supprimer par filtrage analogique tous les signaux non désirés, ce qui se ferait avec un filtre de canal dans notre cas. Or l'un des principaux avantages attendus du traitement numérique est justement la suppression de ce filtre et des changements de fréquences qu'il nécessite en pratique.

Repliements de spectres.

Les repliements de spectres sont les principaux artefacts provoqués par l'échantillonnage.
Nous commencerons par examiner le cas de la **C**onversion **N**umérique - **A**nalogique.
Soit un signal numérique échantillonné ayant une fréquence proche du critère de Shannon.
Nous avons sur la figure 4 l'allure du signal analogique à la sortie du **C**onvertisseur **N-A** avec le spectre électrique correspondant.

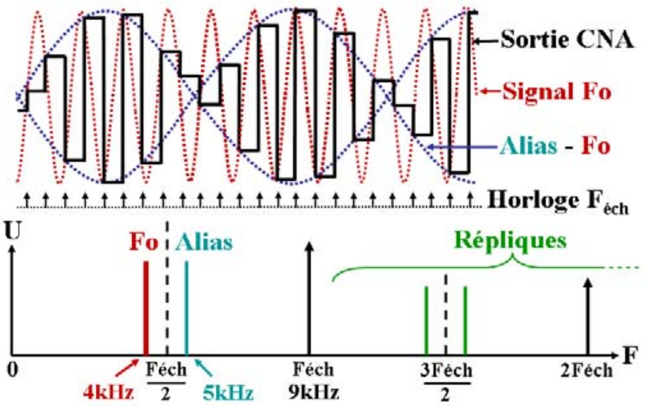

Figure 4.

Les deux représentations nous montrent un résultat très différent de la sinusoïde pure et de la raie unique que nous devrions obtenir. La première raie (bande de base) est celle correspondant à la fréquence de calcul. Les autres sont des artefacts. On distingue des raies à fréquences fixes, la fréquence d'échantillonnage et ses harmoniques, et des raies "images" de la première raie. Noter que celles-ci font partie de spectres étant alternativement les copies directes et inversées du spectre de base. Nous disons que ce sont des raies ou des spectres "repliés". Leur suppression se fera à l'aide d'un filtre passe-bas, le filtre "anti-repliements" (anti-aliasing filter), comme montré sur la figure 5.

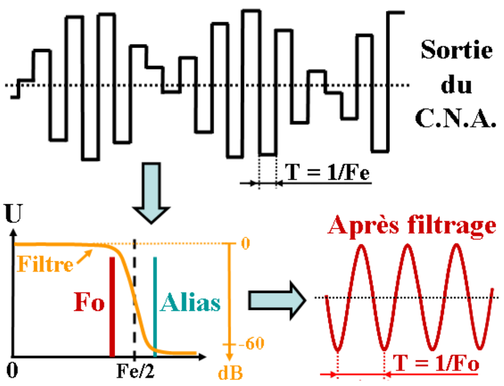

Figure 5.

Comme ce filtre réalise également une interpolation sinusoïdale, il est quelquefois appelé "filtre de reconstruction". Par ailleurs, nous pourrions sélectionner l'un des repliements à l'aide d'un filtre passe-bande approprié mais les niveaux deviennent de plus en plus faibles quand le rang du repliement augmente [6].
L'impossibilité d'avoir un filtre à coupure "hyper raide" va nous obliger à prendre une fréquence d'échantillonnage plus élevée que le critère de Shannon. Par exemple en audio, avec d'excellents filtres on obtient une atténuation de 100 dB [7] pour une fréquence double de la fréquence de coupure. Cela nous amène à prendre une fréquence d'échantillonnage de 44,1 kHz pour un spectre audio 20 Hz - 15 kHz. Prendre une fréquence d'échantillonnage plus élevée relâcherait les contraintes sur le filtre.

Examinons maintenant le problème dans le cas de la **C**onversion **A**nalogique - **N**umérique. Celui-ci est posé sur la figure 6.

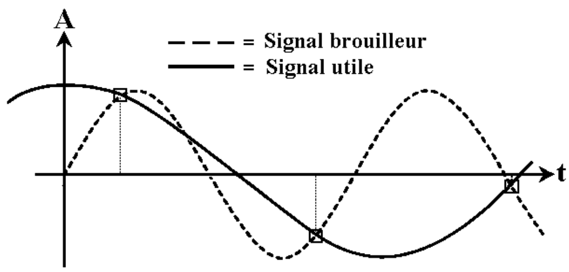

Figure 6.

Nous voyons ici deux signaux à deux fréquences différentes qui ont les mêmes valeurs échantillonnées. Considérant que le signal en bande de base a la fréquence la plus faible, il y a une infinité de signaux à fréquences plus élevées qui ont le même échantillonnage (les repliements). C'est un problème inverse de celui de la **C**onversion **N**umérique **A**nalogique avec une différence : alors qu'avec la conversion **N/A** le problème est toujours présent, avec la conversion **A/N** il n'existe que si des signaux existent dans les bandes repliées.
Si nous convertissons une bande de base ($F_{réf} = 0$) alors il faudra faire précéder le convertisseur **A/N** d'un filtre passe-bas "anti-repliements" avec les mêmes contraintes que pour une conversion **N/A**, en particulier une augmentation de la fréquence d'échantillonnage pour rendre le filtre "fabricable".
Si nous convertissons une bande repliée, c'est un filtre passe-bande qu'il faudra devant le convertisseur et la contrainte sur la fréquence d'échantillonnage sera augmentée, d'autant plus que le rang du repliement sera élevé (filtre plus difficile à fabriquer). Voir la figure 7.

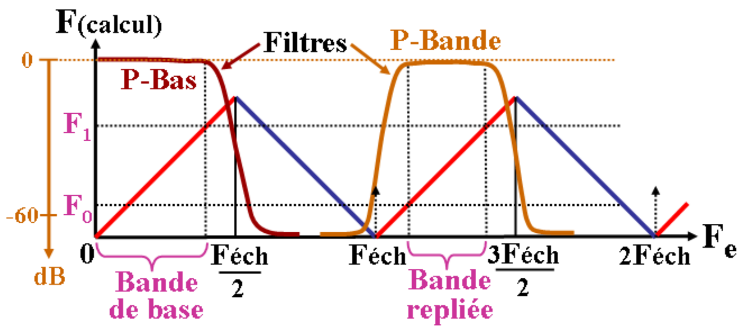

Figure 7.

Noter que pour centrer la bande d'entrée entre deux multiples de la demie fréquence d'échantillonnage $\mathbf{F_{éch}}$ (pour obtenir un filtre passe-bande symétrique), nous devons avoir le rapport : $\mathbf{Fc = (\mathit{n} \pm 1/4) \times F_{éch}}$ avec n = rang du repliement et **Fc** = milieu de la bande d'entrée. Prenons par exemple la bande des 2 m (144 - 146 MHz). Une $\mathbf{F_{éch}}$ de 4 MHz serait en théorie suffisante, mais le facteur de forme du filtre d'entrée nous oblige à prendre une $\mathbf{F_{éch}}$ de 10 MHz environ. Alors nous utiliserons le 14ème repliement et la valeur exacte sera :
$\mathbf{F_{éch}= 145 / 14{,}25 = 10{,}175\ MHz}$ **et** $\mathbf{\mathit{n}F_e=142{,}45\ MHz.}$
En conséquence, $\mathbf{F_{calcul}}$ sera égale à **1,55 MHz** pour **144 MHz** et à **3,55 MHz** pour **146 MHz**, comme montré sur la figure 8 [(8)].

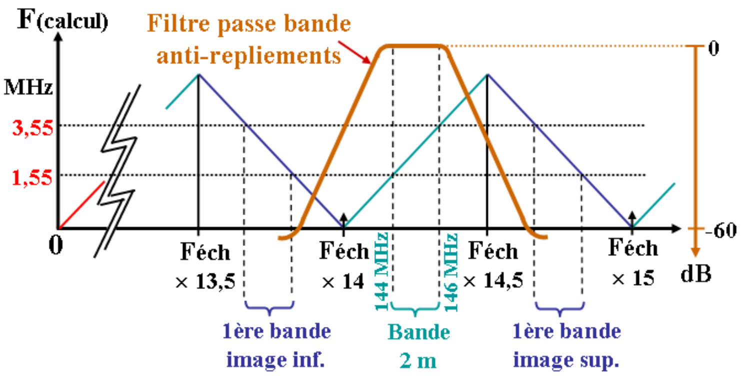

Figure 8.

On notera que si le C.A.N. et le numérique ne travaillent qu'à 10 MHz, l'échantillonneur bloqueur devant le CAN doit pouvoir passer sans atténuation la totalité de la bande d'entrée, soit 146 MHz. Mais il est judicieux de faire porter son effort sur l'échantillonneur pour abaisser la puissance de calcul, la consommation d'énergie et les coûts. Les CAN modernes avec échantillonneur intégré ont une bande passante à -3dB en moyenne trois fois plus élevée que la fréquence maxi de conversion. Donc pour le 144, en prenant un CAN prévu pour une horloge maxi de 64 MHz ayant une bande passante d'échantillonnage de 180 MHz, on travaillera à 10,7 MHz, ce qui permettra d'utiliser un DDC prévu pour une horloge maxi de 50 MHz. Faire travailler le CAN et le DDC à une fréquence plus basse permet de réduire leur consommation. Cette technologie était déjà disponible en 1998.

Récapitulation.

a) Conversion Analogique-Numérique

• L'échantillonnage permet d'acquérir la connaissance d'un signal radioélectrique pour pouvoir traiter mathématiquement l'information qui nous intéresse parmi toutes celles qu'il véhicule.
• Pour cela, le théorème de Shannon-Nyquist nous dit qu'il suffit de faire des mesures à une cadence **Fe** égale à deux fois la largeur de bande spectrale de notre signal (la bande de Nyquist correspondant à **Fe/2**).
• L'opération entraîne des ambiguïtés qui doivent être levées :

- par pré filtrage analogique passe-bas pour un signal en bande de base ($F_{réf} = 0$),
- par pré filtrage passe-bande pour un signal dans une bande repliée ($F_{réf} =$ quelconque). Cette dernière opération est appelée "sous échantillonnage".

b) Conversion Numérique-Analogique

• Pour supprimer les artefacts produits par la conversion et obtenir un signal conforme aux valeurs numériques, il est nécessaire de faire suivre le convertisseur par un filtre passe-bas analogique dit "de reconstruction" ou "anti-repliements".
• On peut aussi conserver l'un des artefacts en l'isolant avec un filtre passe-bande. Cette opération peut être considérée comme étant l'inverse du sous échantillonnage.

Dans tous les cas, l'impossibilité de fabriquer des filtres "parfaits" oblige à utiliser une cadence d'échantillonnage à une fréquence plus élevée que le critère de Shannon-Nyquist.

Annexe 1 : Un peu de mathématique.

Mathématiquement, un échantillonnage est le résultat de la convolution (multiplication) du signal d'entrée avec une série d'impulsions de Dirac produites à intervalles réguliers et d'amplitudes égales aux amplitudes instantanées du signal d'entrée.
La conversion analogique d'un signal numérique $\mathbf{F_{num}}$ sinusoïdal (échantillonné $\mathbf{F_{éch}}$) produit le spectre suivant :

$$\textbf{Spectre (Fs)} = \mathbf{F_{num}} + \sum_{n=1}^{n=\infty} n\mathbf{F_{éch}} + \left(n\mathbf{F_{éch}} \pm \mathbf{F_{num}}\right)$$

En effet, le spectre d'une série d'impulsions de Dirac de récurrence **T** est composé d'une infinité de raies égales espacées de **1/T**. En pratique, à la sortie d'un **CNA**, l'impulsion de Dirac est remplacée par un rectangle de largeur **T** (revoir la figure 5). Alors le spectre aura une décroissance en amplitude selon une loi en **sin(X) / X**.
Pour une conversion numérique $\mathbf{F_{num}}$ par échantillonnage d'un signal sinusoïdal analogique $\mathbf{F_A}$, pas de problème si le signal est seul, il suffit de respecter le critère de Shannon. Par contre, il y a une infinité de signaux qui produisent le même $\mathbf{F_{num}}$. Ceci peut être exprimé mathématiquement par l'expression suivante :

$$\mathbf{F_{num}} = n\mathbf{F_{éch}} \pm \mathbf{F_A} \ (\textbf{avec } n = 0 \cdot\cdot \infty)$$

Noter que lorsque $\mathbf{F_A} = n\mathbf{F_{éch}}/2$, la valeur $\mathbf{U(F_{num})}$ est une constante (**F=0**).
Le spectre d'entrée est alors découpé en une infinité de bandes de fréquences de largeurs égales à $\mathbf{F_{éch} / 2}$ (les bandes de Nyquist). Pour supprimer les ambiguïtés, il est nécessaire de filtrer la bande qui nous intéresse avant échantillonnage. En pratique, ces bandes de Nyquist ne sont pas en nombre infini. En effet, il n'est pas possible d'obtenir des instants d'échantillonnage d'une durée nulle (impulsions de Dirac). Avec des impulsions de durée **T**, la conversion deviendra nulle pour des signaux d'entrée de fréquences ***n*/T**. Par ailleurs, la constante de temps d'acquisition de l'échantillonneur bloqueur entraînera un filtrage passe-bas du premier ordre du signal d'entrée. Ceci est montré graphiquement sur la figure 9.

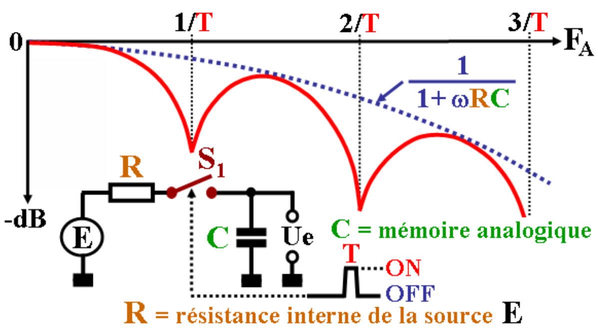

Figure 9.

Annexe 2 : Un peu d'histoire.

La technique de l'échantillonnage est sans doute aussi vieille que l'électronique (on n'a pas attendu la SDR pour s'y intéresser). Les premiers appareils utilisant cette technique étaient les oscilloscopes analogiques à échantillonnage. Les versions numériques actuelles n'en sont que le prolongement avec des améliorations apportées par la technologie. Puis l'échantillonnage a été très employé pour l'asservissement d'un oscillateur libre sur un quartz. Il est utilisé également dans les synthétiseurs haut de gamme. En effet, alors qu'avec une PLL employant des diviseurs digitaux le bruit de phase augmente comme 20 Log(N) (N=rang de division), avec un sous échantillonnage le bruit augmente comme 10 Log(N). Pour lever les ambiguïtés, on commence par verrouiller l'oscillateur avec une division par comptage, puis on commute la

boucle sur l'échantillonneur. Enfin, avec l'avènement des processeurs numériques ayant des puissances de calcul de plus en plus grandes, il devient plus économique de remplacer des composants analogiques par du calcul. Alors les théories de Fourier, Shannon et Dirac, bien que très anciennes, occupent le devant de la scène, de même que les composants réalisant les conversions A/N et N/A. Avec la conversion analogique/numérique l'échantillonneur devient incontournable [9]. Il est d'ailleurs généralement intégré dans les C.A.N. modernes.
En dehors de l'électronique, l'échantillonnage est mis en œuvre dans la stroboscopie [10].

Bibliographie.

Pour ceux qui seraient intéressés par une application type "SDR", ils peuvent lire la série de six articles sur le traitement du signal publiés dans R-REF entre décembre 2006 et octobre 2007. Ils sont aussi consultables sur le site "www.f6krk.org", rubrique "Articles F5NB", série des "Radio logicielle".

Notes.

1) *Il suffit d'avoir une puissance de calcul suffisante.*
2) *Ou une image analogique de ce signal (fréquence FI).*
3) *J'ai bien dit "performances" et non pas "caractéristiques".*
4) *Après une petite interpolation linéaire faite par un léger filtrage du signal reconstitué.*
5) *Lors d'un changement de fréquence, les informations de phase et d'amplitude ne sont pas altérées (sinon, depuis le temps que l'on fait des récepteurs superhétérodynes, cela se saurait).*
6) *Dans le VNA DG8SAQ, les repliements du DDS sont utilisés sans aucun filtrage, celui-ci étant fait dans la partie réception (horloge différente, FI à 1 kHz et filtre passe-bas).*
7) *Dynamique d'une numérisation sur 16 bits.*
8) *Où l'on s'aperçoit qu'un sous échantillonnage réalise une conversion de fréquence.*
9) *Le signal analogique à l'entrée du CAN doit rester stable durant tout le temps de la conversion, d'où le nom d' "échantillonneur bloqueur".*
10) *Les roues des chariots qui tournent à l'envers dans les westerns constituent une illustration visuelle de ce qu'est un repliement de spectre.*