QUELQUES DEFINITIONS MATHEMATIQUES

utiles en électromagnétisme

Robert BERRANGER F5NB

En électromagnétisme, on trouve souvent des expressions mathématiques bizarres comme des intégrales triples, des multiplications de vecteurs, des exponentielles, des nombres complexes, sans parler du calcul trigonométrique et de l'analyse vectorielle.
Il n'est absolument pas nécessaire de maîtriser les règles mathématiques pour comprendre les principes. On peut faire confiance aux mathématiciens et accepter les résultats auxquels elles conduisent. Je rappellerai ici quelques définitions élémentaires que le lecteur pourra sauter au gré de ses connaissances. Je ne m'étendrai pas sur les règles de calcul, ce n'est pas un cours de maths. Ce pensum est prévu pour être conservé à portée de main afin d'affronter avec sérénité les formules sophistiquées que l'on rencontre parfois dans certains articles.
Un grand remerciement pour son aide à Jean-Pierre, F6FQX.

Mathématique usuelle.

Grandeurs.

En physique, comme en mathématique, on considère deux sortes de grandeurs :
Les unes sont dites « grandeurs scalaires ». Ce sont celles qui sont susceptibles d'être représentées par un nombre [(1)], dès que l'on a choisi une unité de mesure. Telles sont les longueurs, les aires, les volumes, mais aussi, le temps, les flux…
Les autres sont dites « grandeurs vectorielles ». Ce sont celles qui, lorsque l'on a défini une unité de mesure, sont représentées par un vecteur. Telles sont les forces, les champs électriques et magnétiques, la vitesse d'un point mobile…

Nombres relatifs.

Ce sont les nombres arithmétiques que nous employons dans la vie courante. Nous supposerons connues les opérations élémentaires qui peuvent leur être appliquées.

Des nombres relatifs aux vecteurs.

Les nombres relatifs peuvent être « matérialisés » par des points sur une droite.
Prenons une droite de longueur infinie et plaçons-y un point **O** correspondant à la valeur du nombre zéro. Un nombre positif **A** sera matérialisé sur la droite par un point situé d'un côté du point **O** à une distance d'un certain nombre d'unités de longueur correspondant à sa valeur. Un nombre négatif **B** sera matérialisé par un point situé de l'autre côté du point **O.**
On peut associer à chaque nombre ainsi matérialisé, le segment de droite qui relie son point au point **O** (zéro). Ce segment de droite est appelé vecteur. Prenons le vecteur **OA**. Le point **O** est appelé « origine », et le point **A** « extrémité ». Pour le distinguer de l'origine, on lui adjoint une flèche. Le nombre A qui détermine la longueur du vecteur est appelé « module ».
On appelle « direction » du vecteur, la droite orientée qui le supporte. L'orientation de cette droite est définie par rapport à une droite de référence (plan) ou à deux droites orthogonales (volume). Tout ceci est résumé sur la figure 1.

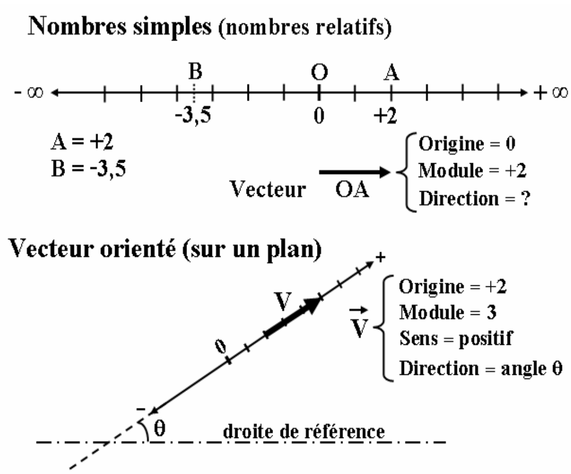


Figure 1

Les vecteurs peuvent être « libres » si l'on ne tient pas compte de leur origine, et « liés », s'ils ont même origine.
Des vecteurs situés sur un même plan sont dits « coplanaires » et des vecteurs ayant même direction sont dits « colinéaires ».

Addition de vecteurs.

L'addition de deux vecteurs V + V' s'obtient en déplaçant le vecteur V' de manière que son origine coïncide avec l'extrémité du vecteur V. La somme est alors un vecteur dont l'origine est celle de V et l'extrémité celle de V', comme montré sur la figure 2.

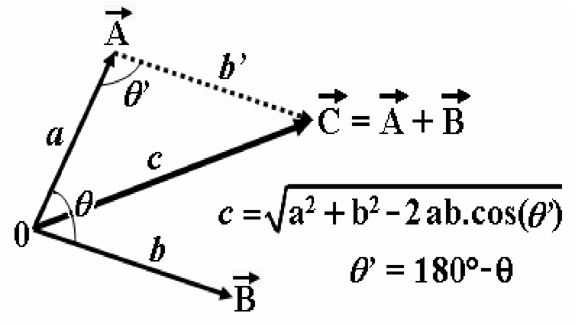


Figure 2

Noter que si θ = 0 (vecteurs colinéaires) le module somme est égal à la somme des modules, et que si θ = 90° (vecteurs en quadrature), le module somme se calcule comme l'hypoténuse d'un triangle rectangle (théorème de Pythagore).

Multiplication de vecteurs.

Produit scalaire.
On appelle produit scalaire (**V×V'**) des vecteurs **V** et **V'** le produit de leurs modules par le cosinus de l'angle qu'ils font entre eux (compris entre 0 et 180°). En conséquence, le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux (θ = 90°) est nul.

Produit vectoriel.
Dans un espace orienté, on appelle produit vectoriel (**V**∧**V'**) de deux vecteurs **V** et **V'**, un vecteur **W** aux propriétés suivantes :

- Son module est égal au produit des modules par le sinus de l'angle que font les vecteurs entre eux.
- Sa direction est perpendiculaire au plan formé par les deux vecteurs.
- Son sens est tel que le trièdre qui le contient avec les autres vecteurs soit positif (voir plus loin espace orthonormé).

Nous avons sur la figure 3 une représentation graphique d'un produit vectoriel.

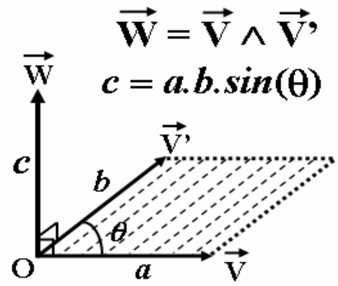


Figure 3

Noter que si les vecteurs **V** et **V'** sont en quadrature, le module du vecteur **W** est simplement le produit de leurs modules.
En électromagnétisme, un produit vectoriel typique est le vecteur de Poynting.

Vecteur tangentiel.

Prenons une force qui s'exerce d'une manière circulaire. On représente cette force en un point **M** par un vecteur tangent à la force circulaire, ayant pour origine le point **M**, pour sens le sens de la force, et un module égal à la valeur de la force exercée au point **M**. Voir exemple sur la figure 4.

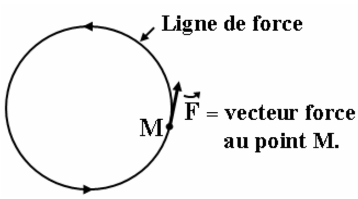


Figure 4

Pour indiquer que le vecteur correspond à une force circulaire, on remplace sa flèche droite par une flèche courbe.

Champ de vecteurs.

C'est un ensemble de vecteurs de même nature, contenus dans un plan ou un volume. Par exemple, les vecteurs « vent » en plusieurs points à l'intérieur de l'atmosphère.

Espace orthonormé.

Pour situer un point ou un vecteur dans l'espace, on a besoin d'axes de références, et de points de référence sur ces axes. Pour un plan, deux axes perpendiculaires suffisent et pour un volume, il nous faudra trois axes, perpendiculaires deux à deux. Sur ces axes, on définit un point de référence commun **O**. Nous obtenons ainsi un espace orthonormé (ortho = droit). Voir figure 5.

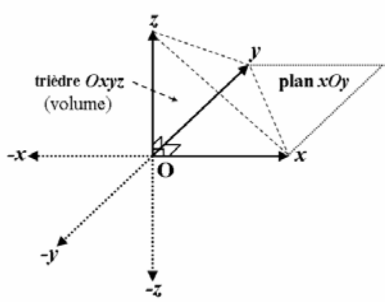


Figure 5

Noter qu'à partir d'un volume orthonormé, nous obtenons trois plans : le plan ***xOy***, le plan ***xOz*** et le plan ***yOz***.
La nomination des axes suit la loi du tire-bouchon de Maxwell : si l'on enfonce un tire-bouchon dans la direction de *z*, cela amène l'axe **O*x*** sur l'axe **O*y***.
Soit le trièdre ayant pour sommets ***O,x,y,z***. On dit qu'il est orienté à gauche si un observateur ayant les pieds en **O,** la tête dirigée vers ***x*** et regardant vers ***y***, a le sommet *z* à sa gauche, comme sur la fig.5. Par suite le trièdre ***O,y,x,z*** est orienté à droite, et l'on constate que l'orientation est fonction de l'ordre d'énumération des sommets. Par définition, un trièdre est positif quand il est orienté à gauche (cas du produit vectoriel).

Coordonnées rectangulaires.

On appelle coordonnées d'un point ou d'un vecteur, les projections de ce point ou de ce vecteur sur les trois axes d'un espace orthonormé. Voir figure 6.

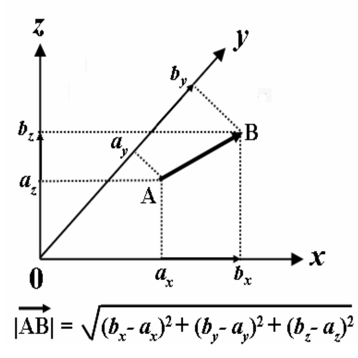


Figure 6

Les points a_x ,a_y *et* a_z sont les coordonnées du point **A**. Les vecteurs projetés $a_n b_n$ sont appelés vecteurs composants du vecteur **AB**. Dans la formule donnant la longueur du vecteur **AB**, l'expression sous le radical n'est autre que le produit scalaire du vecteur par lui-même.
Quand on a un vecteur seul ou plusieurs vecteurs coplanaires, on choisit leur plan comme plan de référence. Alors, deux axes orthogonaux suffisent, et les vecteurs font partie du plan.

Axe de révolution
Si notre système vectoriel a un axe de symétrie cylindrique, on le prend comme référence et l'étude du système peut se faire sur un seul plan de révolution autour de cet axe. Par exemple, on prend l'axe ***Oz*** comme axe de révolution, ainsi l'étude se fait dans le plan ***xOz***, et le plan ***xOy*** n'existe pas, puisqu'il correspond à la rotation de 90° du plan ***xOz***.

Vecteurs tournants (trigonométrie).

Traçons sur un plan un cercle de rayon unité de centre **O**. Faisons passer par ce centre deux axes orthogonaux. Nous obtenons le cercle trigonométrique, détaillé sur la figure 7.

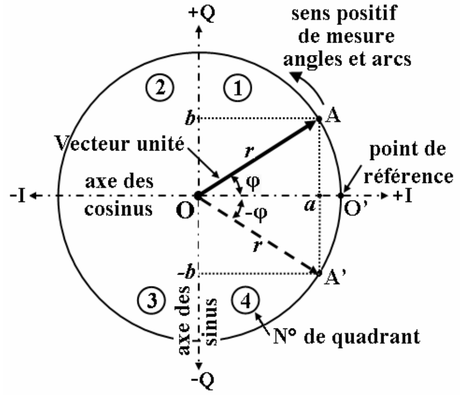


Figure 7

La mesure de l'angle **φ,** appelé « phase », peut se faire en degrés ou en radians. Un radian est la mesure de l'angle dont l'arc correspondant est égal au rayon. Il y a donc **2π** radians dans un cercle (**P = π.D = 2π.r**). Par définition, la valeur ***Oa*** est le cosinus de l'angle **φ** et la valeur ***Ob***, son sinus.
Prenons un vecteur **OA**, partant du point **O'**, tournant indéfiniment autour du point **O**, et faisant un tour en un temps **T**. Traçons les coordonnées du point **A** sur l'axe des sinus et sur l'axe des cosinus en fonction du temps. Nous obtenons la figure 8.

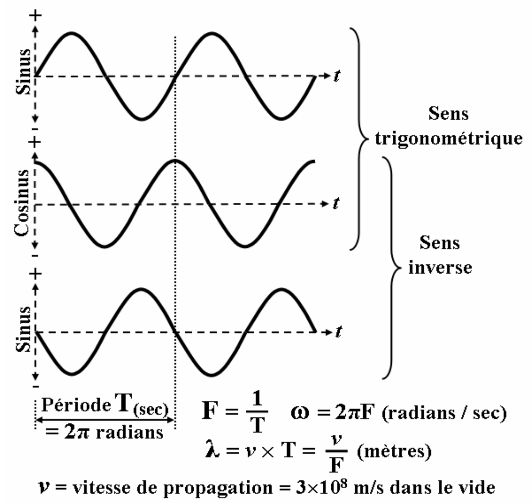


Figure 8

F est la fréquence exprimée en Hertz. **λ** est la longueur d'onde exprimée en mètres. Par l'intermédiaire de la vitesse de propagation, elle relie le temps à une longueur. Elle joue un grand rôle en propagation électromagnétique.

Noter que les courbes du sinus et du cosinus ont la même allure, avec comme différence un décalage dans le temps (différence de phase). En prenant le cosinus comme référence, lorsque le vecteur tourne dans le sens trigonométrique, le sinus est en retard de phase de $\pi/2$ radians (90°) sur le cosinus, et en avance de phase de $\pi/2$ radians quand le vecteur tourne en sens inverse.

Coordonnées polaires.

Revenons à la figure 7. Le point **A** peut être défini par ses coordonnées rectangulaires ***a*** et ***b***, mais aussi par la distance ***r*** et l'angle **φ**. Ces deux valeurs constituent ses coordonnées polaires. Alors, deux plans orthogonaux avec coordonnées polaires sur chaque plan suffisent pour situer un point dans un volume. Le passage entre les coordonnées rectangulaires et polaires s'effectue grâce aux opérations sur les sinus et les cosinus.

Coordonnées cylindriques.

Elles utilisent un plan avec coordonnées polaires et un axe orthogonal au plan pour la troisième dimension (axe passant par le centre du cercle trigonométrique).

Nombres complexes.

Le couple (a,b) de deux nombres réels est appelé nombre complexe. Nous avons par définition les règles :
- (a,b) = (a',b') seulement si a=a' et b=b'
- (a,b) + (a',b') = (a+a' , b+b')
- (a,b) × (a',b') = (aa'-bb' , ab'+ba')
- (a,0) = a

En appliquant ces règles, nous obtenons :
(a,b) = (a,0) + (0,b),
= a + [(0,1) × (b,0)],
= a + [b×(0,1)].
C'est la notation de tout nombre complexe avec deux nombres réels et le nombre complexe **(0,1)**. Celui-ci a une propriété particulière, son carré est égal à **-1**, ce qui est impossible avec un nombre réel. C'est pourquoi on l'appelle « nombre imaginaire » avec le symbole « ***i*** ». En électronique, ce symbole étant réservé au courant, on le remplace par « ***j*** ».
Nous obtenons la notation standard d'un nombre complexe : {***a + jb***}, ***a*** est appelée « partie réelle » et ***jb***, « partie imaginaire », avec ***j*** = racine carrée de (**-1**).
On peut représenter un nombre complexe par un vecteur. Par exemple sur la fig. 7, le vecteur OA représente le nombre complexe {**a + *j*b**}, **a** (partie réelle) est la coordonnée de **A** sur l'axe des cosinus (axe **I** = ***In** phase*) et **b**, sa coordonnées sur l'axe des sinus (axe **Q** = ***Q**uadrature phase*). On peut alors écrire le nombre complexe sous la forme $\{r \times (\cos\varphi + j \sin\varphi)\}$. Le terme ***r*** est appelé « module » du nombre complexe, et ***φ*** son « argument ». On peut également l'écrire sous forme exponentielle complexe : $\{r.e^{j\varphi}\}$.
Noter que nous avons un autre nombre complexe (vecteur OA') qui a le même module et un argument inverse. Il est appelé « complexe conjugué » du premier. Par exemple, si R = a + *j*b, alors R* = a – *j*b.
En électronique, les nombres complexes sont très utilisés dans les calculs d'impédances et de puissances.

Fonctions.

On dit qu'une grandeur **y** est une fonction de la grandeur variable ***x*** lorsque la valeur de **y** est liée par une expression mathématique à la variation de ***x***, et l'on note **y = *f* (*x*)**. Le degré de la fonction est donné par le plus fort exposant de ***x*** contenu dans l'expression mathématique.
Une grandeur peut être fonction de plusieurs variables. En physique on dépasse rarement quatre variables. Par exemple la force **F** en un point **M**(*x,y,z*) (espace orthonormé), en fonction du temps, s'exprimera par : « **F = *f* (*x,y,z,t*)** ».

Dérivées.

Prenons une autoroute au bas d'une longue côte signalée par un panneau « 5% ». Ce rapport de 0,05 est la dérivée de la fonction qui lie l'altitude à la distance parcourue {***h = f (d)***}. La dérivée, que nous appellerons pente (**P**), est le **taux de variation d'altitude** ramené à un élément **d'accroissement de distance** quand cet élément tend vers zéro. Nous noterons {**P = f'*(d)*** (= 0,05)}
Si l'altitude était constante, la dérivée serait nulle (les constantes d'une fonction n'interviennent pas dans sa dérivée). Et si nous étions dans une descente, la dérivée serait négative.
Noter qu'ici la pente est constante et la dérivée a la même valeur partout. Si ce n'était pas le cas, sa fonction admettrait une dérivée seconde {**f''*(d)***} qui relierait la **variation de pente** avec la **distance** (donc la dérivée de la pente).
La dérivée d'une fonction de degré ***n*** est une fonction de degré ***n-1***. En conséquence, une fonction de degré ***n*** admet ***n*** dérivées successives [(2)].
Certaines fonctions admettent une infinité de dérivées, ainsi des sinus, des cosinus, et des exponentielles[(3)].

Différentielle.

Soit la fonction **y = *f (x)*** admettant une dérivée **f'*(x)***. En se donnant une quantité arbitraire **d*x***, on appelle différentielle de la fonction **y** la quantité **d*y* = f'*(x)*** × **d*x***. En faisant **d*x*** suffisamment petit nous obtenons une notation différentielle pour la dérivée de *y = f (x)* :

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

Dérivées partielles.

Soit une fonction de deux variables indépendantes, ***y = f (u,v)***. Si, ***v*** étant laissé constant égal à v_0, la fonction $f\,(u,v_0)$ de ***u*** seul admet une dérivée par rapport à ***u*** pour $u = u_0$, on dit que cette dernière est la dérivée partielle de ***y*** par rapport à ***u*** (pour $u = u_0$ et $v = v_0$) et on note la valeur de cette dérivée {$f'_u\,(u_0,v_0)$} ou :

$$\frac{\delta y}{\delta u}\,(u_0,v_0)$$

Noter le remplacement de la lettre **d** par le symbole **δ** qui indique que nous avons affaire à une dérivée partielle.
On définit de façon analogue le nombre {$f'_v\,(u_0,v_0)$}, dérivée partielle de ***y*** par rapport à ***v***.
Lorsque u_0 et v_0 varient, on définit ainsi deux nouvelles fonctions des variables ***u*** et ***v***, notées f'_u et f'_v ou encore :

$$\frac{\delta y}{\delta u} \text{ et } \frac{\delta y}{\delta v}$$

Nous avons sur la figure 9, une interprétation géométrique de dérivées partielles.

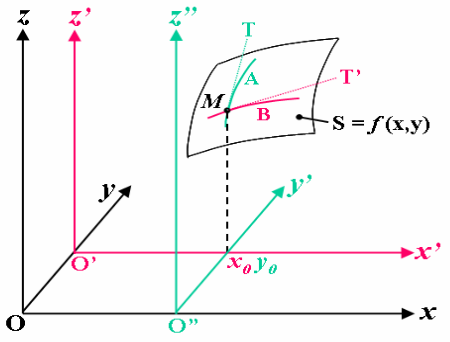
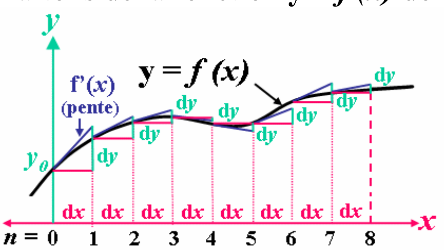


Figure 9

La section **A** est dans le plan {***y',O'',z''***} et la section **B** est dans le plan {***x',O',z'***}. La droite ***M*T**, tangente à la courbe **A** en ***M***, représente le coefficient angulaire (par rapport à ***O'',y'***) de la dérivée $\mathbf{f'_y}\ (x_0,y_0)$. Même principe pour la droite ***M*T'** avec la dérivée $\mathbf{f'_x}\ (x_0,y_0)$.

Primitives et intégrales.

Partons de la fonction **y =** ***f (x)*** dont le graphe est sur la figure 10.



$$\mathbf{y_n} = \left[\sum_0^n dy\right] + y_0 = \left[\sum_0^n f'(x).dx\right] + y_0$$

si $\mathbf{dx} \to 0$, $\mathbf{n} \to \infty$, alors $\mathbf{y} = \int f'(x)\ dx + C$

Figure 10

Nous voyons que nous pouvons reconstituer la fonction en additionnant (symbole sigma) un certain nombre de ses différentielles successives (**d*y*/d*x***). Nous voyons aussi que cette reconstitution sera d'autant plus fidèle que **d*x*** sera petit. Quand il tend vers zéro, nous remplaçons le symbole « sigma » par le symbole « grand S ». La fonction reconstituée est appelée « primitive » ou « intégrale » de la fonction dérivée. Il y en a une infinité selon la constante que l'on peut y ajouter (ici, y_0), en effet les constantes disparaissent avec la dérivation. Cette intégrale est dite « indéfinie ».

Soit une fonction **y =** ***f*** **(*x*)** continue dans l'intervalle ***a,b*** (*b*>*a*) de la variable ***x***, on appelle « intégrale définie dans l'intervalle ***a,b***, la primitive **S = F (*x*)** égale à la soustraction de la primitive de ***f*** **(*x*)** en ***a*** de la primitive de ***f*** **(*x*)** en ***b*** :

$$\mathbf{S} = \left[\int b\ \mathbf{dx} + \mathbf{C}\right] - \left[\int a\ \mathbf{dx} + \mathbf{C}\right] = \int_a^b f(x)\ dx$$

Nous lirons « somme de ***a*** à ***b*** de ***f*** de ***(x)***, **d*x*** » (intervalle ***a,b*** de ***x***).
Noter que la constante a disparu.
Nous avons sur la figure 11 une vision géométrique de l'intégrale définie.

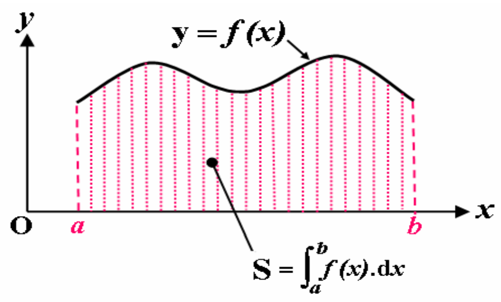


Figure 11

Nous remarquerons que **S** divisé par l'intervalle ***a,b***, représente la moyenne de **y**.

Nous pouvons avoir à intégrer une fonction de plusieurs variables. Cette opération se fait en intégrant successivement selon chaque variable, en remplaçant au fur et à mesure la fonction à intégrer par le résultat de l'intégration précédente. Par exemple, soit **S** une fonction de deux variables ***x*** et ***y,*** continues dans les intervalles ***0,a*** et ***0,b***. On note **P** le résultat de l'intégration de **S** en ***x*** (***y*** étant considérée comme une constante). Alors, la valeur finale de l'intégration double est le résultat de l'intégration de **P** en ***y***. Symboliquement :

$$\mathbf{S} = \int_0^a \int_0^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\mathbf{P} = \int_0^a f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

$$\mathbf{S} = \int_0^b (P)\,\mathrm{d}y$$

La fonction **S** est appelée « intégrale de surface ». Nous avons de même la fonction **V**, comportant une triple intégration, qui est alors appelée « intégrale de volume ».

Logarithmes.

Nous ne connaissons pas de polynôme dont la dérivée est égale à ***1/x***, mais une primitive existe si sa dérivée est continue dans un certain intervalle, ce qui est le cas ici.
On appelle ***logarithme*** de ***x*** l'intégrale définie de **1** à ***x*** qui admet **1/*x*** comme dérivée. Elle est définie dès que ***x***>0 car alors la fonction **1/*x*** est continue. Nous avons sur la figure 12 la représentation géométrique du logarithme et le graphe de sa fonction.

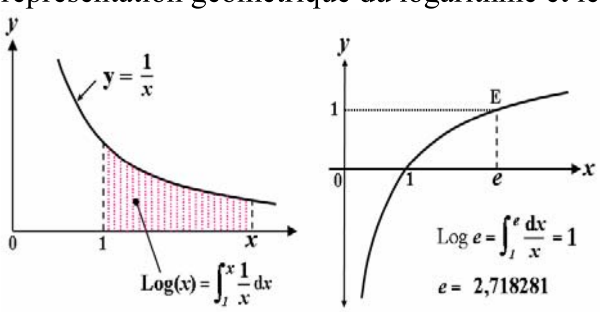


Figure 12

Noter la valeur particulière de ***x*** (2,71828…), notée ***e***, pour laquelle la fonction Log (***x***) est égale à 1.
Considérons maintenant l'intégrale définie dont la dérivée est **M/*x***. C'est encore un logarithme. Si nous prenons pour **M** la valeur {**1**/Log (**B**)}, nous obtenons une nouvelle

fonction logarithme qui a pour valeur **1** lorsque $x = B$. Nous la noterons : $y = \mathrm{Log}_B(x)$. **B** est appelée « base » du logarithme. En dehors des logarithmes naturels pour lesquels **M = 1** et **B** = e, les plus utilisés sont les logarithmes décimaux avec **M = 0,43429…** et **B = 10** (4). Noter que pour tous les logarithmes, $\mathrm{Log}_B(1) = 0$.
Les logarithmes ont des propriétés de calcul particulières que nous résumerons ici :

$$\mathrm{Log}\,(a \times b) = \mathrm{Log}\,a + \mathrm{Log}\,b$$

$$\mathrm{Log}\left(\frac{a}{b}\right) = \mathrm{Log}\,a - \mathrm{Log}\,b$$

$$\mathrm{Log}\,(a^{m}) = m\,.\,\mathrm{Log}\,a$$

Théorie des exposants.

Nous connaissons le carré d'un nombre a, noté $y = a^2$ et la racine carrée de y qui est le nombre a, mais aussi $-a$. Par la suite, nous supposerons a toujours positif. Nous disons que y est égal à a à la puissance deux, deux étant l'exposant. Nous pouvons généraliser à une puissance p entière quelconque de a. De même, nous généraliserons la racine entière $q^{\text{ième}}$ de a.
Si nous considérons l'expression y = racine $q^{\text{ième}}$ de {a à la puissance p}, nous obtenons la notation sous forme d'exposant fractionnaire avec les propriétés suivantes :

$$y = \sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

$$a^{\lambda} \times a^{\mu} = a^{\lambda+\mu}$$

$$(a^{\lambda})^{\mu} = a^{\lambda\times\mu}$$

Comme tout nombre rationnel peut se mettre sous forme fractionnaire, l'exposant peut être une variable et nous aboutissons à la forme générale : $y = a^{x}$.

Exponentielle.

D'après les règles de calcul des logarithmes, nous avons : $\mathrm{Log}\,a^x = x\,\mathrm{Log}\,a$. Posons $a = e$ (e = 2,71828 = base des logarithmes naturels) et considérons la fonction $y = e^x$. Elle est appelée « fonction exponentielle ». Nous avons : $\mathrm{Log}\,y = x\,\mathrm{Log}\,e$. Or $\mathrm{Log}\,e = 1$. Donc $\mathrm{Log}\,y = x$, ou $x = \mathrm{Log}\,y$. La fonction exponentielle est l'inverse de la fonction logarithme. Nous avons les graphes des deux fonctions sur la figure 13.

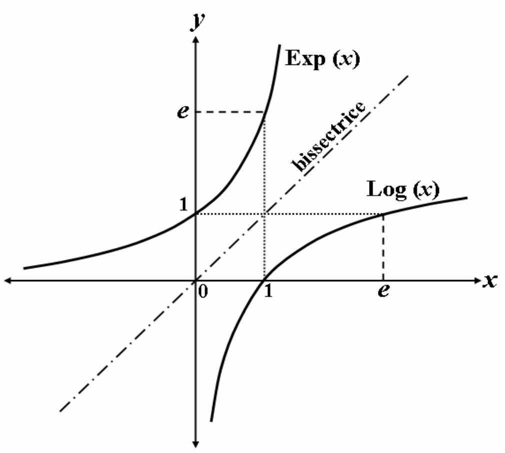


Figure 13

Noter que $e^0 = 1$.
La fonction exponentielle a la propriété importante d'avoir sa dérivée égale à elle-même [5].

Notions d'analyse vectorielle.

Dans les articles sur l'électromagnétisme, on rencontre des gradients {**E = -grad V**}, des divergences {**div B = 0**}, et des rotationnels {**rot H = j**} (**E**, **B** et **H** étant des vecteurs). En analyse vectorielle, ces termes sont appelés des opérateurs. Leurs noms proviennent de la physique des fluides initiatrice de l'analyse vectorielle.

1- Le gradient.

Définition mathématique : « le gradient d'un champ de scalaires est le champ de vecteurs associant à tout point du champ de scalaires le vecteur représentant, en grandeur et en direction, la pente maximale en ce point ».
Nous avons un exemple simple de gradient sur la figure 14.

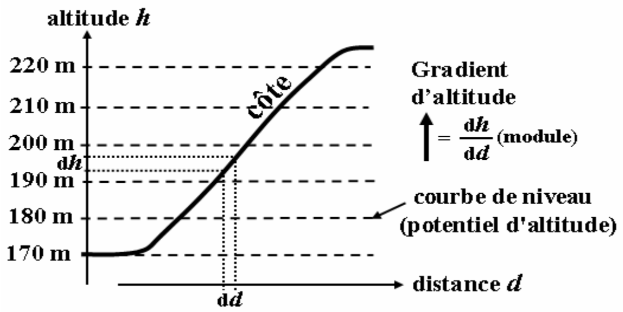


Figure 14

Noter que le vecteur gradient d'altitude est exprimé par rapport à la distance (ou longueur) et est perpendiculaire aux courbes de niveau. Noter également que si la route tourne en montant, le gradient ne prend pas en compte ce changement de direction [6].
Nous avons en électromagnétisme un exemple de gradient avec le champ électrique **E** = d**V** / d***d***, (***d*** = distance pour laquelle existe une d.d.p. **V)**. Ce vecteur champ est perpendiculaire aux « courbes iso-potentiel » et son module mesure une différence de potentiel par unité de distance (ou de longueur).

2- La divergence.

Définition mathématique : « la divergence d'un champ de vecteurs est le champ de scalaires associant à tout point du champ de vecteurs un scalaire égal à la somme des variations d'amplitude des composantes du champ de vecteurs suivant les trois directions orthonormées.
La divergence est un nombre positif ou négatif, qui mesure simultanément l'étalement (ou le resserrement) d'un flux et l'accroissement (ou l'affaiblissement) de sa force en un point [7].
Plus précisément, la divergence du flux est la somme des variations de sa force dans toutes les directions partant de ce point.
Mathématiquement on montre qu'un tel indicateur représente une tendance, à la dispersion (cas d'une divergence positive), à la concentration (cas d'une divergence négative), ou à la conservation (cas d'une divergence nulle), des « flux des éléments constitutifs du fluide ».
Par exemple, examinons la figure 15 où nous avons un tube cylindrique évasé, genre extrémité de clarinette. En soufflant dedans, faisons-y circuler un « courant » d'air à débit

constant. Nous exprimerons par un champ de vecteurs des quantités de flux constantes correspondant aux déplacements des molécules d'air à l'intérieur du tube.

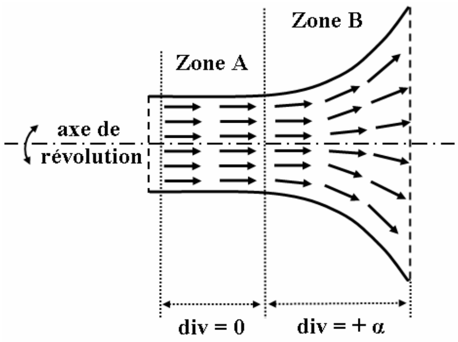


Figure 15

Dans la zone A, la divergence est nulle, rien ne change. Dans la zone B, la divergence est positive, les vecteurs correspondent à des densités de flux plus faibles. Noter qu'à la sortie de la zone B, la divergence sera maximum. Si nous voulons conserver une divergence nulle tout le long d'un circuit, il faut que celui-ci soit fermé (bouclé sur lui-même).
En électromagnétisme, on trouve l'expression {**div B = 0**} qui signifie que l'induction magnétique est à flux conservatif.

3- Le rotationnel.

Intéressons nous aux cyclones tropicaux. Un cyclone est une dépression très profonde avec des vents violents qui tournent autour du centre du cyclone (l'œil) dans le sens inverse des aiguilles d'une montre dans l'hémisphère nord. La dépression se présente comme un entonnoir avec l'œil au milieu et les lignes isobariques (de même pression) s'étageant en cercles concentriques sur son cône. Du fait de la rotation de la terre (force de Coriolis), les vents qui devraient s'établir de l'extérieur vers le centre du cyclone, sont en fait tangentiels aux lignes isobariques (cyclone bien formé). Plus les courbes isobares sont resserrées, plus la force du vent est grande. Tout ceci est montré sur la figure 16.

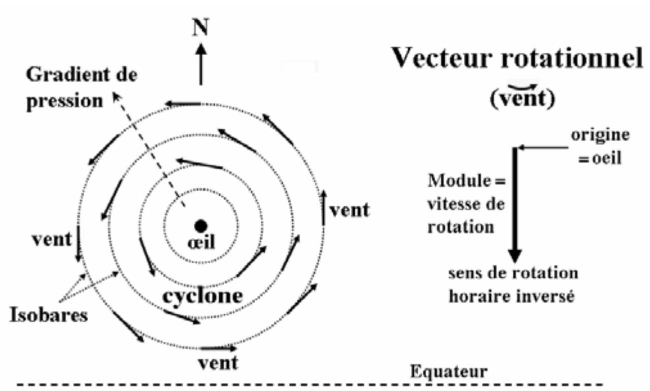


Figure 16

Nous sommes donc en présence d'un champ de vecteurs, ceux des vents, qui tournent autour d'un point particulier. On appelle « **rotationnel** » l'indicateur de cette **rotation** des vents, et l'on prend un vecteur pour pouvoir lui associer plusieurs paramètres :
- son axe (ici une verticale au centre de la dépression)

- son sens de rotation (un axe dirigé du sol vers l'atmosphère indiquera une rotation dans le sens des aiguilles d'une montre, et *vice versa*)
- sa vitesse de rotation (plus le module de ce vecteur sera grand, plus la rotation sera rapide).

Défini mathématiquement, cela donne : « le rotationnel d'un champ de vecteurs de composantes $\{\mathbf{F}_x, \mathbf{F}_y, \mathbf{F}_z\}$ est un autre champ de vecteurs associant à tout point du premier champ un vecteur de composantes $\{(\boldsymbol{\delta}\mathbf{F}_z/\boldsymbol{\delta}\mathbf{y} - \boldsymbol{\delta}\mathbf{F}_y/\boldsymbol{\delta}z), (\boldsymbol{\delta}\mathbf{F}_x/\boldsymbol{\delta}z - \boldsymbol{\delta}\mathbf{F}_z/\boldsymbol{\delta}x), (\boldsymbol{\delta}\mathbf{F}_y/\boldsymbol{\delta}x - \boldsymbol{\delta}\mathbf{F}_x/\boldsymbol{\delta}\mathbf{y})\}$ ».

Ces équations différentielles sont nécessaires et suffisantes pour trouver l'axe, le sens et la vitesse de rotation d'un rotationnel. On en trouve une application directe dans la transcription des équations de Maxwell de leur forme analytique en coordonnées rectangulaires. En électromagnétisme nous avons (entre autres) l'expression $\{\mathbf{rot\ H} = \mathbf{j}\}$ qui est la loi d'Ampère. Elle veut dire qu'au voisinage d'un fil parcouru par un courant, il y a un champ magnétique de révolution tangent à des cercles concentriques au fil, et dont la valeur est proportionnelle au courant.

Bibliographie.

J'ai beaucoup emprunté à ces deux références :

• « Cours de Mathématiques » tome 1 « Eléments de calcul différentiel et intégral ». Cours du C.N.A.M. par A. HOCQUENGHEM et P. JAFFARD (Masson).

• «Qu'appelle-t-on « Divergence » et « Rotationnel » ? » et autres articles intéressants, F6FQX, http://f6fqx.chez-alice.fr/.

Notes.

(1) *Nombre simple, toujours réel, ou module d'un nombre complexe, voire sa partie réelle.*

(2) *Exemple du calcul de la dérivée d'un polynôme P du second degré,* $y = ax^2 + bx + c$ *:* $f'(P) = 2ax + b$ *(la dérivée de* $a.x^n$ *est* $a.n.x^{n-1}$*).*

(3) *La dérivée de sin(x) est cos(x) et celle de cos(x), -sin(x).Le sinus et le cosinus redeviennent eux-mêmes toutes les quatre dérivations. Quant à la fonction exponentielle, sa dérivée est égale à elle-même.*

(4) *Les logarithmes décimaux ont comme avantage que leurs unités correspondent à des puissances de 10. Par exemple,* $Log_{10}(10) = 1$, $Log_{10}(100) = 2$, $Log_{10}(0{,}1) = -1$, $Log_{10}(0{,}01) = -2$, *etc…*

(5) *D'après le théorème sur la dérivée d'une fonction inverse, on a :* $\mathbf{y'_x = 1/x'_y}$*. Mais l'égalité* $\mathbf{x} = Log\ \mathbf{y}$ *entraîne* $\mathbf{x' = 1/y}$*. Par suite* $\mathbf{y'_x = y = e^x}$*.*

(6) *Il faudrait faire intervenir le rotationnel, que nous verrons plus loin.*

(7) *La pression étant égale au débit d'air (flux par seconde) par unité de surface, elle diminue tant que la divergence est positive. Elle est constante si la divergence est nulle et elle augmente si la divergence est négative (convergence).*